2020年下学期怀化市新博览高三期中大联考

数学试卷

命题人:长郡中学　王　毅

时间:120分钟　　满分:150分

一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集$U=\mathbf{R}$,$A=\{x|x^2-x-6<0\}$,$B=\{x|y=\ln(1-x)\}$,则$A\cap(\complement_U B)=$ (　　)

A. $[1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(1,3)$　　D. $(-2,1]$

2. 已知某次数学考试的成绩服从正态分布$N(102,4^2)$,则114分以上的成绩所占的百分比为(附:$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$,$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$,$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$) (　　)

A. 0.3%　　B. 0.23%　　C. 1.3%　　D. 0.13%

3. 设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$\frac{a_7}{a_4}=\frac{14}{13}$,则$\frac{S_{13}}{S_7}=$ (　　)

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{14}{13}$　　D. $\frac{13}{14}$

4. 中国古代近似计算方法源远流长,早在八世纪,我国著名数学家张遂在编制《大衍历》中发明了一种二次不等距插值算法:若函数$y=f(x)$在$x=x_1$,$x=x_2$,$x=x_3(x_1<x_2<x_3)$处的函数值分别为$y_1=f(x_1)$,$y_2=f(x_2)$,$y_3=f(x_3)$,则在区间$[x_1,x_3]$上$f(x)$可以用二次函数来近似代替:$f(x)\approx y_1+k_1(x-x_1)+k_2(x-x_1)(x-x_2)$,其中$k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,$k=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$,$k_2=\frac{k-k_1}{x_3-x_1}$.若令$x_1=0$,$x_2=\frac{\pi}{2}$,$x_3=\pi$,请依据上述算法,估算$\sin\frac{\pi}{5}$的值是 (　　)

A. $\frac{14}{25}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{16}{25}$　　D. $\frac{17}{25}$

5. 记单调递增的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_2+a_4=10$,$a_2a_3a_4=64$,则 (　　)

A. $S_{n+1}-S_n=2^{n+1}$　　B. $a_n=2^n$　　C. $S_n=2^n-1$　　D. $S_n=2^{n-1}-1$

6. 设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F,抛物线C与圆$C':x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$交于M,N两点.若$|MN|=\sqrt{6}$,则$\triangle MNF$的面积为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递增，则 ω 的取值范围为　(　　)

A. $\left(0,\frac{8}{3}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2},\frac{8}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{3}{8},2\right]$

8. 点 F 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，过点 F 向双曲线的一条渐近线引垂线，垂足为 A，交另一条渐近线于点 B，若 $2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$，则双曲线的离心率为　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{14}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. 2

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分)

9. 函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x-1)$与 $f(x-2)$都为偶函数，则　(　　)

A. $f(x)$为偶函数　　B. $f(x+1)$为偶函数

C. $f(x+2)$为奇函数　　D. $f(x)$为周期函数

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E,F,G 分别是 AB,BC,B_1C_1 的中点. 下列命题正确的是　(　　)

A. 以正方体的顶点为顶点的三棱锥的四个面最多只有三个面是直角三角形

B. P 在直线 FG 上运动时，$AP\perp DE$

C. Q 在直线 BC_1 上运动时，三棱锥 $A-D_1QC$ 的体积不变

D. M 是正方体的面 $A_1B_1C_1D_1$ 内到点 D 和 C_1 距离相等的点，则 M 点的轨迹是一条线段

11. 定义$[x)$表示大于 x 的最小整数，例如$[-1)=0$，$[1.1)=2$，则下列命题中正确的是　(　　)

A. 函数 $f(x)=x-[x)$的值域是$[-1,0)$

B. 若数列$\{a_n\}$是等差数列，则数列$\{[a_n)\}$也是等差数列

C. 若数列$\{a_n\}$是等比数列，则数列$\{[a_n)\}$也是等比数列

D. 若 $x\in(0,2\,018)$，则方程$[x)-x=0.1$有 2 018 个根

12. 关于函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，下列判断正确的是　(　　)

A. $x=2$ 是 $f(x)$的极大值点

B. 函数 $y=f(x)-x$ 有且只有 1 个零点

C. 存在正实数 k，使得 $f(x)>kx$ 成立

D. 对任意两个正实数 x_1,x_2，且 $x_1>x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>4$

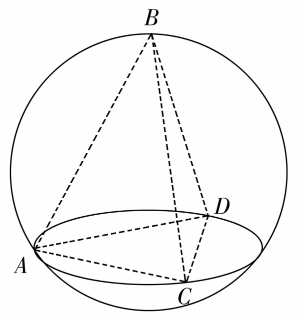
三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 若$\left(\frac{1}{x}-2\right)(a\sqrt[3]{x}+1)^5$ 的展开式中的常数项为-12,则 $a=$__________.

14. 在$\triangle ABC$ 中,$AB=1$,$AC=2$,$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$,若点 M 满足$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$,则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________.

15. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和是 S_n,$a_1=1$,$a_n\neq 0$,$3S_n=a_na_{n+1}+1$,若 $a_k=2\ 020$,则 $k=$__________.

16. 如图所示,在三棱锥 $B-ACD$ 中,$\angle ABC=\angle ABD=\angle DBC=\frac{\pi}{3}$,$AB=3$,$BC=BD=2$,则三棱锥 $B-ACD$ 的外接球的表面积为__________.



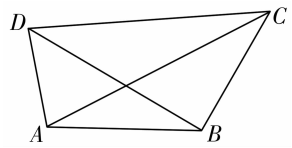
三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 10 分)

如图所示,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle ADB=45°$,$\angle BAD=105°$,$AD=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $BC=2$,$AC=3$.

(1)求边 AB 的长及 $\cos\angle ABC$ 的值;

(2)若记$\angle ABC=\alpha$, 求 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值.



18.(本小题满分 12 分)

设正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_1=1$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

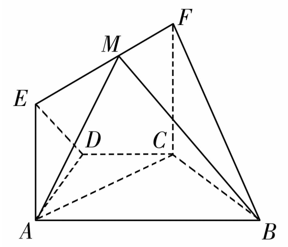
(2)设数列$\{b_n\}$满足$\frac{b_1}{2^1}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{b_n}{2^n}=a_n$,求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.(本小题满分 12 分)

如图所示,在几何体 $ABCDEF$ 中,$AB\parallel CD$,$AD=DC=CB=1$,$\angle ABC=60^\circ$,四边形 $ACFE$ 为矩形,平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$,$CF=1$.

(1)求证:平面 $FBC\perp$ 平面 $ACFE$;

(2)点 M 在线段 EF 上运动,设平面 MAB 与平面 FCB 所成二面角的平面角为 $\theta(\theta\leqslant 90^\circ)$,试求 $\cos\theta$ 的取值范围.

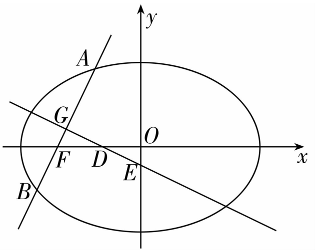


20.(本小题满分 12 分)

如图所示,椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F,过点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点,$|AF|$ 的最大值为 M,$|BF|$ 的最小值为 m,满足 $M\cdot m=\dfrac{3}{4}a^2$.

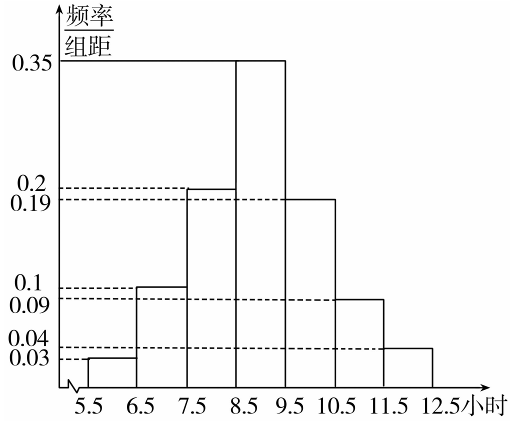
(1)若线段 AB 垂直于 x 轴时,$|AB|=\dfrac{3}{2}$,求椭圆的方程;

(2)线段 AB 的中点为 G,AB 的垂直平分线与 x 轴和 y 轴分别交于 D,E 两点,O 是坐标原点,记 $\triangle GFD$ 的面积为 S_1,$\triangle OED$ 的面积为 S_2,求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.



21.(本小题满分 12 分)

2019 年 2 月 13 日《烟台市全民阅读促进条例》全文发布,旨在保障全民阅读权利,培养全民阅读习惯,提高全民阅读能力,推动文明城市和文化强市建设.某高校为了解条例发布以来全校学生的阅读情况,随机调查了 200 名学生每周阅读时间 X(单位:小时)并绘制如图所示的频率分布直方图.



(1)求这 200 名学生每周阅读时间的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2(同一组中的数据用该组区间的中间值代表);

(2)由直方图可以认为,目前该校学生每周的阅读时间 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$,σ^2 近似为样本方差 s^2.

(ⅰ)一般正态分布的概率都可以转化为标准正态分布的概率进行计算:若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,令 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,则 $Y\sim N(0,1)$,且 $P(X\leqslant a)=P\left(Y\leqslant\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$.利用直方图得到的正态分布,求 $P(X\leqslant 10)$;

(ⅱ)从该高校的学生中随机抽取 20 名,记 Z 表示这 20 名学生中每周阅读时间超过 10 小时的人数,求 $P(Z\geqslant 2)$(结果精确到 0.000 1)以及 Z 的数学期望.

参考数据:$\sqrt{178}\approx\dfrac{40}{3}$,$0.773\ 4^{19}\approx 0.007\ 6$.若 $Y\sim N(0,1)$,则 $P(Y\leqslant 0.75)=0.773\ 4$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x}-x^{2}$，$g(x)=a\mathrm{e}^{x}-2ax+a^{2}-10(a\in\mathbf{R})$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)>g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2020年下学期怀化市新博览高三期中大联考

数学试卷参考答案

1. A　2. D　3. A　4. C　5. C　6. B　7. B　8. C

9. ABD　10. BCD　11. AD　12. BD

13. -1　14. $\frac{8}{3}$　15. 1 347　16. $\frac{19\pi}{2}$

17. 解析：(1)在$\triangle ABD$中，$\angle ABD=30^\circ$，$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

$\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\therefore AB=\sqrt{3}$，……………………………………………………………… 2分

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$，

$\therefore 3^2=3+2^2-2\sqrt{3}\times 2\cos\angle ABC$，$\therefore \cos\angle ABC=-\frac{\sqrt{3}}{6}$. ……………………………………… 5分

(2)由(1)知$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{33}}{6}$，$\sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{11}}{6}$，$\cos 2\alpha=-\frac{5}{6}$，……………………………… 8分

$\therefore \sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{12}$. ……………………………… 10分

18. 解析：(1)正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，

且$a_1=1$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，得$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

因为$S_n>0$，所以$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，$\{\sqrt{S_n}\}$是以$\sqrt{S_1}=1$为首项，公差为1的等差数列，

所以$\sqrt{S_n}=1+(n-1)=n$，则有$S_n=n^2$，

当$n\geqslant 2$时，$a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$，且$a_1=1$也适合$a_n=2n-1$，

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$. ……………………………………………………………… 6分

(2)①当$n=1$时，得$\frac{b_1}{2^1}=a_1=1$，所以$b_1=2$；

②当$n\geqslant 2$时，由$\frac{b_1}{2^1}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{b_n}{2^n}=a_n=2n-1$　①，

得$\frac{b_1}{2^1}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}}=a_{n-1}=2n-3$　②，①－②得$\frac{b_n}{2^n}=2$，则有$b_n=2^{n+1}$，

可得数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=\begin{cases}2, n=1,\\ 2^{n+1}, n\geqslant 2,\end{cases}$

所以当 $n=1$ 时，$T_1=2$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}=2+\dfrac{2^3(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n+2}-6$，

当 $n=1$ 时，$T_1=2$(符合上式)，故 $T_n=2^{n+2}-6$. ······ 12 分

19. 解析：(1)在四边形 $ABCD$ 中，

$\because AB /\!/ CD, AD=DC=CB=1, \angle ABC=60^\circ, \therefore AB=2$，

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 60^\circ=3$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，

$\therefore BC\perp AC$. ······ 2 分

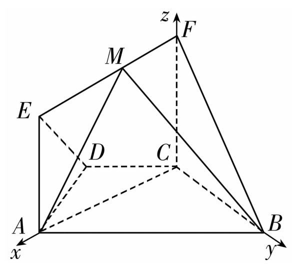
$\because$ 四边形 $ACFE$ 为矩形，$\therefore FC\perp AC$，$FC\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because$ 平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ACFE\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore FC\perp BC$，$BC\perp$ 平面 $ACFE$.

又 $\because BC\subset$ 平面 FBC，$\therefore$ 平面 $FBC\perp$ 平面 $ACFE$. ······ 5 分

(2)由(1)知可建立分别以直线 CA, CB, CF 为 x 轴，y 轴，z 轴的空间直角坐标系 $C-xyz$，如图所示，令 $FM=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3})$，



则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$M(\lambda,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BM}=(\lambda,-1,1)$. ······ 6 分

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$为平面 MAB 的法向量，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ \lambda x-y+z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\sqrt{3}-\lambda)$. ······ 8 分

$\because \boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$是平面 FCB 的一个法向量，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+3+(\sqrt{3}-\lambda)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}-\lambda)^2+4}}$. ······ 10 分

$\because 0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3}$，$\therefore$ 当 $\lambda=0$ 时，$\cos\theta$ 有最小值$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

当 $\lambda=\sqrt{3}$时，$\cos\theta$ 有最大值$\dfrac{1}{2}$，$\therefore \cos\theta\in\left[\dfrac{\sqrt{7}}{7},\dfrac{1}{2}\right]$. ······ 12 分

20. 解析：(1)设 $F(-c,0)(c>0)$，由椭圆性质得 $M=a+c$，$m=a-c$，而 $M\cdot m=\dfrac{3}{4}a^2$，$\therefore$ 有 $a^2-c^2=\dfrac{3}{4}a^2$，即 $a^2=4c^2$，$a=2c$，

又$\frac{2b^2}{a}=\frac{3}{2}$且$a^2=b^2+c^2$，得$a=1,b^2=\frac{3}{4}$，椭圆的方程为$x^2+\frac{4y^2}{3}=1$. …………………………… 4分

(2)由(1)可知$a=2c,b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，椭圆的方程为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

由题意知直线AB的斜率一定存在不为零，设直线AB的方程为$y=k(x+c)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则由$\begin{cases}y=k(x+c),\\ \frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1,\end{cases}$ $(4k^2+3)x^2+8ck^2x+4k^2c^2-12c^2=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{8ck^2}{4k^2+3}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2+2c)=\frac{6ck}{4k^2+3}$，

$\therefore G\left(-\frac{4ck^2}{4k^2+3},\frac{3ck}{4k^2+3}\right)$. $\because DG\perp AB$，$\frac{\frac{3ck}{4k^2+3}}{-\frac{4ck^2}{4k^2+3}-x_D}\cdot k=-1$，$\therefore x_D=-\frac{ck^2}{4k^2+3}$.

由Rt$\triangle FGD$与Rt$\triangle EOD$相似得

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{GD^2}{OD^2}=\frac{\left(-\frac{4ck^2}{4k^2+3}+\frac{ck^2}{4k^2+3}\right)^2+\left(\frac{3ck}{4k^2+3}\right)^2}{\left(-\frac{ck^2}{4k^2+3}\right)^2}=9+\frac{9}{k^2}>9$，$\frac{S_1}{S_2}$范围为$(9,+\infty)$. ……………… 12分

21. 解析：(1)$\bar{x}=6\times0.03+7\times0.1+8\times0.2+9\times0.35+10\times0.19+11\times0.09+12\times0.04=9$， ……… 2分

$s^2=(6-9)^2\times0.03+(7-9)^2\times0.1+(8-9)^2\times0.2+(9-9)^2\times0.35+(10-9)^2\times0.19+(11-9)^2\times0.09+(12-9)^2\times0.04=1.78$. ………………………………………………………………… 4分

(2)(ⅰ)由题知$\mu=9,\sigma^2=1.78$，$\therefore X\sim N(9,1.78)$.

$\sigma=\sqrt{1.78}=\frac{\sqrt{178}}{10}\approx\frac{4}{3}$. ………………………………………………………………… 5分

$P(X\leqslant10)=P\left(Y\leqslant\frac{10-9}{\frac{4}{3}}\right)=P(Y\leqslant0.75)=0.7734$. ………………………………………… 7分

(ⅱ)由(ⅰ)知$P(X>10)=1-P(X\leqslant10)=0.2266$， ………………………………………… 8分

可得$Z\sim B(20,0.2266)$，

$P(Z\geqslant2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=1-0.7734^{20}-C_{20}^{1}0.2266\times0.7734^{19}=1-(0.7734+20\times0.2266)\times0.0076\approx0.9597$， ………………………………………………………… 10分

Z的数学期望$E(Z)=20\times0.2266=4.532$. ……………………………………………… 12分

22. 解析：(1) $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-2x$，$f'(1)=e-2$，

$f(1)=-1$，所求切线方程为$y=(e-2)x+1-e$. ………………………………………………… 4分

(2)令$h(x)=f(x)-g(x)=(x-a-1)e^x-x^2+2ax-a^2+10(x>0)$，

$h'(x)=e^x+(x-a-1)e^x-2x+2a=(x-a)(e^x-2)$，

①当$a\leqslant0$时，$x-a>0$，$0<x<\ln2$时，$h'(x)<0$；$x>\ln2$时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,\ln 2)$上是减函数,在$(\ln 2,+\infty)$上是增函数,

$\therefore h(x)\geqslant h(\ln 2)=-a^2+(2\ln 2-2)a-\ln^2 2+2\ln 2+8>0$,

$\therefore (a-\ln 2-2)(a-\ln 2+4)<0$,即$\ln 2-4<a\leqslant 0$;…………………………………………………… 7 分

②当$0<a<\ln 2$时,$h(x)$在$(0,a)$上是增函数,在$(a,\ln 2)$上是减函数,在$(\ln 2,+\infty)$上是增函数,

要使$h(x)>0$,

则$\begin{cases} h(\ln 2)>0, \\ h(0)\geqslant 0, \end{cases}$解得$0<a<\ln 2$; ………………………………………………………… 9 分

③当$a=\ln 2$时,$h'(x)\geqslant 0$,$h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,

$h(0)=9-\ln 2-\ln^2 2>0$,成立;…………………………………………………………………………… 10 分

④当$a>\ln 2$时,$h(x)$在$(0,\ln 2)$上是增函数,在$(\ln 2,a)$上是减函数,在$(a,+\infty)$上是增函数,

要使$h(x)>0$,

则$\begin{cases} h(a)>0, \\ h(0)\geqslant 0, \end{cases}$解得$\ln 2<a<\ln 10$.

综上,实数a的取值范围为$(\ln 2-4,\ln 10)$. ……………………………………………………… 12 分