快乐数学试卷第一套答案

1、【解析】选 D。选项 A,B 中角度的表示混合用到了角度制和孤度制,不符合要求;选项 C 中 k 前多了个“2”,故选 D。

2、【解析】选 D。根据向量的加减运算易知①②③④⑤均正确。

3、【解析】选 D。根据样本和样本容量,总体和总体容量的定义可知,样本是学生的身高,样本容量是 31,总体是 310 名学生的身高,总体容量是 310.故选 D

4、

【解析】选 B. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos 120^\circ$

$=5\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-20.$

5、

【解析】$\frac{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}=\frac{\tan 15^\circ-1}{\tan 15^\circ+1}$

$=\frac{\tan 15^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 15^\circ\tan 45^\circ}=\tan(15^\circ-45^\circ)=\tan(-30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

6、

A 【解析】因为 $\bar{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$, $\bar{y}=\frac{30+40+60+50+70}{5}=50$,所以 $50=6.5\times5+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=17.5$,故选 A.

7、【解析】选 B。从长度分别为 1,3,5,7,9 的 5 根细木棒中任取 3 根,共有(1,3,5),(1,3,7),(1,3,9),(1,5,7),(1,5,9),(1,7,9),(3,5,7),(3,5,9),(3,7,9),(5,7,9),共 10 种情况,而能构成三角形的只有(3,5,7),(3,7,9),(5,7,9),共 3 种情况,所以所求概率为 $\frac{3}{10}$。

8、

【解析】选 C. 由周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

所以小球的摆动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

所以 $l=g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$,代入 $g=980$, $T=1$,

得 $l=980\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2=\frac{245}{\pi^2}$ cm.

9、【解析】选 B。这 13 个数据中位于[499, 501]的个数为 6, 故所求概率为$\frac{6}{13}$。故选 B

10、

B 【解析】由测试成绩（满分 120 分）的频率分布直方图得，分数在 100 ~ 110 的频率为$(0.04+0.03)\times 5=0.35$.

∵ 分数在 100 ~ 110 的学生有 21 人，

$\therefore N=\frac{21}{0.35}=60$. 故选 B.

11、

核心素养培优区

易错误区案例 » 三角函数式的化简问题

【典例】已知$\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$，则$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}$的值为（　　）

A. $-\sin\frac{\alpha}{2}$　　B. $\cos\frac{\alpha}{2}$

C. $\sin\frac{\alpha}{2}$　　D. $-\cos\frac{\alpha}{2}$

【解析】选 A. 因为$\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$，所以$\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}$，

所以$\cos\alpha<0, \sin\frac{\alpha}{2}<0$，

易错提醒：忽视判断 $\cos\alpha$ 及 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的符号

原式$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\alpha}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|\cos\alpha|}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}$

$=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=-\sin\frac{\alpha}{2}$，

所以，原式$=-\sin\frac{\alpha}{2}$.

【纠错心得】重视角的范围对函数值符号的影响

从里到外去掉根号时，要注意根据角的范围选择正负号，不能机械套用公式，如本例中根据 α，$\frac{\alpha}{2}$ 所在象限确定 $\cos\alpha$，$\sin\frac{\alpha}{2}$ 的符号，去掉绝对值符号.

12、

D 【解析】由题意可得正方体的体积 $V_1=1$. 又球的直径是正方体的体对角线，故球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以球的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 则此点落在正方体内部的概率 $P=\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

13、

900 【解析】高二年级被抽取的人数为 $45-20-10=15$，则每层的抽样比为 $15:300=1:20$，所以学生总数为 $45\div\frac{1}{20}=900$，即这个学校共有高中学生 900 人.

14、

【解析】设 $P(x,y)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2)$，$\overrightarrow{PB}=(4-x,5-y)$，又 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，所以 $(x-1,y-2)=2(4-x,5-y)$，

即 $\begin{cases}x-1=2(4-x),\\ y-2=2(5-y),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=4.\end{cases}$

15、

【解析】因为

$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，

因此需要 $x-\frac{\pi}{12}$，

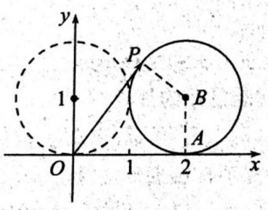
易错提醒：此处易出现弄错平移单位的错误

所以需要向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位.

答案：右 $\frac{\pi}{12}$

16、

【解析】设 $A(2,0)$，$B(2,1)$，由题意知劣弧 $\overset{\frown}{PA}$ 长为 2，$\angle ABP=\frac{2}{1}=2$.



设 $P(x,y)$，则 $x=2-1\times\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=2-\sin 2$，$y=1+1\times\sin\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=1-\cos 2$，

所以 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为 $(2-\sin 2,1-\cos 2)$.

答案：$(2-\sin 2,1-\cos 2)$

17、

【解】(1) 采用的是系统抽样.

(2) 由于 80 分及以上的频率为 $(0.050+0.020)\times5=0.35$，

因此估计这次测试中优秀的人数为 $40\times30\times0.35=420$.

(3) 成绩在 $[75,80)$ 分的人数最多，

因此众数的估计值为 $\frac{75+80}{2}=77.5$(分)；

中位数的估计值为 $75+\frac{0.5-0.2-0.1-0.05}{0.3}\times5=77.5$(分)；

平均数的估计值为 $62.5\times0.05+67.5\times0.1+72.5\times0.2+77.5\times0.3+82.5\times0.25+87.5\times0.1=77$(分).

18、

【思路分析】(1)由题意计算平均数与回归系数,写出 y 关于 t 的线性回归方程;

(2)由 $t=x-2012$,代入(1)中线性回归方程,求得 y 关于 x 的线性回归方程;

(3)将 $x=2020$ 代入线性回归方程,求得 $\hat{y}$ 的值即可.

【解】(1)由题意计算 $\bar{t}=3$,$\bar{y}=\frac{36}{5}=7.2$,$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=120$,$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=55$,

$$\because \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-5\,\bar{t}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-5\,\bar{t}^2}=\frac{120-5\times3\times7.2}{55-5\times9}=1.2,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=7.2-1.2\times3=3.6$,

$\therefore y$ 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.2t+3.6$.

(2)$\because t=x-2012$ 与 $\hat{y}=1.2t+3.6$,

$\therefore \hat{y}=1.2(x-2012)+3.6$,

即 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.2x-2\,410.8=1.2x-2\,410.8$.

(3)将 $x=2020$ 代入 $\hat{y}=1.2x-2\,410.8$,

得 $\hat{y}=1.2\times2020-2\,410.8=13.2$,

$\therefore$ 到2020年底,该地储蓄存款额大约可达13.2亿元.

19、

【解析】(1)令 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$,则 $(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=0$,

即 $3m|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+(5m-9)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

解得 $m=\frac{29}{14}$.

故当 $m=\frac{29}{14}$ 时,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

(2)令 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{d}$,则 $3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$,

即 $(3-\lambda m)\boldsymbol{a}+(5+3\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,

所以 $\begin{cases}3-\lambda m=0,\\5+3\lambda=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{5}{3},\\m=-\frac{9}{5}.\end{cases}$

故当 $m=-\frac{9}{5}$ 时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线.

20、

$\cdot\dfrac{\sqrt{3}\tan 12^\circ-3}{(4\cos^2 12^\circ-2)\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\dfrac{\sin 12^\circ-\sqrt{3}\cos 12^\circ}{\cos 12^\circ}\right)}{2(2\cos^2 12^\circ-1)\cdot\sin 12^\circ}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\sin 12^\circ-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 12^\circ\right)}{2\cos 24^\circ\cdot\sin 12^\circ\cdot\cos 12^\circ}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(\sin 12^\circ\cdot\cos 60^\circ-\cos 12^\circ\cdot\sin 60^\circ}{\sin 24^\circ\cdot\cos 24^\circ}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\sin(12^\circ-60^\circ)}{\dfrac{1}{2}\sin 48^\circ}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}(-\sin 48^\circ)}{\sin 48^\circ}$

$=-4\sqrt{3}.$

3. 由 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，

得 $3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$， ①

由 $4\tan\dfrac{\alpha}{2}=1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$，得

$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}$， ②

由①②得 $\tan(\alpha+\beta)=1$，

又因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

21、

【解析】(1) 选 A. $f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在

$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上单调递减，所以$[-a,a]\subseteq\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，故$-a\geqslant$

$-\dfrac{\pi}{4}$ 且 $a\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$，解得 $0<a\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

(2)①$f(x)=6\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x$

$=3\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+3=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+3$

$=2\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$，故 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}+3$；

最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

②由 $f(\alpha)=3-2\sqrt{3}$，得

$2\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+3=3-2\sqrt{3}$，

故 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$.

又由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，得$\dfrac{\pi}{6}<2\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\pi+\dfrac{\pi}{6}$，

故 $2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\pi$，解得 $\alpha=\dfrac{5}{12}\pi$.

22、

【解析】由直线 $kx-y=0$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交可知，圆心 $(5,0)$ 到直线 $kx-y=0$ 的距离小于半径 3，即 $\dfrac{|5k|}{\sqrt{1+k^2}}<3$，整理并解得 $-\dfrac{3}{4}<k<\dfrac{3}{4}$. 又 $k\in[-1,1]$，所以由几何概型概率公式可知，所求概率 $P=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$.

【解析】设小张到校时间为 x，小王到校时间为 y，(x,y) 可以看成平面中的点. 试验的全部结果所构成的区域 $\Omega=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{15}{2}\leqslant x\leqslant\frac{47}{6},\frac{15}{2}\leqslant y\leqslant\frac{47}{6}\right\}$，这是一个正方形区域，面积为 $S_\Omega=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

设事件 A 表示"小张比小王至少早5分钟到校"，所构成的区域为 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,y-x\geqslant\frac{1}{12},\frac{15}{2}\leqslant x\leqslant\frac{47}{6},\frac{15}{2}\leqslant y\leqslant\frac{47}{6}\right\}$，即图中的阴影部分，面积 $S_A=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$. 这是一个几何概型问题，所以 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{9}{32}$.